



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa  
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



# Metoda elementów skończonych (MES2)

Wykład 4. Zagadnienia dynamiki

03.2026L

# Wprowadzenie do zagadnienia dynamiki struktur

Nieustalone równanie równowagi dynamicznej dla liniowej struktury dyskretniej (równania ruchu)

$$\begin{matrix} \overset{\circ\circ}{[M]} & \overset{\circ}{[C]} & \overset{\circ}{[K]} & = & \{F(t)\} \\ n \times n & n \times n & n \times n & & n \times 1 \\ n \times 1 & n \times 1 & n \times 1 & & \end{matrix}$$

gdzie:  $[M]$  - macierz masowa (bezwładności),  
 $[C]$  - macierz tłumienia,  
 $[K]$  - macierz sztywności,  
 $\{q\}$  - wektor przemieszczeń węzłowych,  
 $\{\dot{q}\}$  - wektor prędkości węzłowych,  
 $\{\ddot{q}\}$  - wektor przyspieszeń węzłowych,  
 $\{F(t)\}$  - wektor obciążenia.

$$\{\dot{q}\} = \frac{d}{dt} \{q(t)\} = \begin{Bmatrix} \frac{dq_1(t)}{dt} \\ \frac{dq_2(t)}{dt} \\ \dots \\ \frac{dq_n(t)}{dt} \end{Bmatrix}, \quad \{\ddot{q}\} = \frac{d^2}{dt^2} \{q(t)\} = \begin{Bmatrix} \frac{d^2q_1(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2q_2(t)}{dt^2} \\ \dots \\ \frac{d^2q_n(t)}{dt^2} \end{Bmatrix}$$

Energia odkształcenia sprężystego:

$$U = \frac{1}{2} [q] [K] \{q\}$$

Energia kinetyczna:

$$T = \frac{1}{2} [\dot{q}] [M] \{\dot{q}\}$$

Macierz tłumienia przedstawiana jest jako kombinacja liniowa macierzy bezwładności i macierzy sztywności:

$$[C] = \alpha_t [M] + \beta_t [K] \quad \text{- model tłumienia Rayleigha}$$

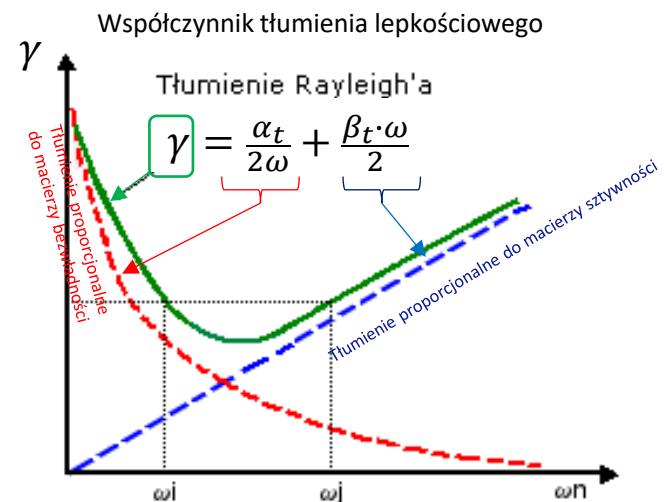
$\alpha_t, \beta_t$  - współczynniki tłumienia zewnętrznego i wewnętrznego  
 (wyznaczane doświadczalnie)

**Przypadki szczególne:**

$\{F(t)\} = \{0\}$  - drgania swobodne

$\{F(t)\} = \{0\}$ ,  $[C]=[0]$  - drgania swobodne bez tłumienia

$[M]=[0]$ ,  $\{F(t)\} = \{0\}$ ,  $[C]=[0]$  - problem statyki liniowej



## WARTOŚCI WŁASNE I WEKTORY WŁASNE W ALGEBRZE

Rozważmy szczególną postać układu liniowego, w którym wektor po prawej stronie jest wielokrotnością wektora rozwiązania  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$$

lub rozpisując:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & \lambda x_2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & \lambda x_n \end{array}$$

Jest to standardowe (klasyczne) algebraiczne **zagadnienie na wartości własne**.

Układ można przekształcić do postaci jednorodnej  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Nietrywialne rozwiązanie tego równania jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy macierz  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$  jest osobliwa, a jej wyznacznik:  $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$

W rezultacie otrzymujemy algebraiczne równanie wielomianowe stopnia  $n$  ze względu na  $\lambda$ :

$$P(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_n = 0$$

Jest to znane jako **równanie charakterystyczne** macierzy  $\mathbf{A}$ . Lewa strona nazywana jest **wielomianem charakterystycznym**. Wiemy, że wielomian stopnia  $n$  ma  $n$  (zwykle zespolonych) pierwiastków  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Te  $n$  liczb nazywane są **wartościami własnymi** macierzy  $\mathbf{A}$ .

Dla każdej wartości własnej  $\lambda_i$  mamy związany z nią wektor własny  $\mathbf{x}_i$  który spełnia równanie  $\mathbf{Ax}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ .

Wektor własny jest określony tylko do pewnego współczynnika skali: jeśli  $\mathbf{x}_i$  jest wektorem własnym, to  $\beta \mathbf{x}_i$  również, gdzie  $\beta$  jest dowolną liczbą różną od zera.

Wektory własne są często normalizowane, tak że np. ich długość euklidesowa wynosi 1.

## Drgania swobodne - analiza modalna

$$\begin{array}{c}
 [M] \ddot{\{q\}} + [C] \dot{\{q\}} + [K] \{q\} = \{F(t)\} \\
 \begin{array}{cccc}
 n \times n & n \times 1 & n \times n & n \times 1 \\
 n \times n & n \times 1 & n \times n & n \times 1 \\
 n \times n & n \times 1 & n \times n & n \times 1 \\
 n \times 1 & & & 
 \end{array}
 \end{array}
 \longrightarrow
 [M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{0\}$$

- układ równań różniczkowych drugiego rzędu

Rozwiązanie ogólne:  $\{q(t)\} = \{q\}_A \cos \omega t + \{q\}_B \sin \omega t$

$\{q\}_A, \{q\}_B$  - wektory obliczone z warunków początkowych

$\omega$  - częstość własna

$$\{\ddot{q}\} = -\omega^2 \{q\}_A \cos \omega t - \omega^2 \{q\}_B \sin \omega t = -\omega^2 \{q\}$$

$$-\omega^2 [M] \{q\} + [K] \{q\} = \{0\} \longrightarrow ([K] - \omega^2 [M]) \{q\} = \{0\} \quad \text{- problem na wartości własne}$$

Rozwiązanie trywialne:  $\{q\} = \{0\}$

Rozwiązania nietrywialne:  $\det([K] - \omega^2 [M]) = 0$

*Wyznacznik - wielomian n-tego stopnia w odniesieniu do  $\omega^2$*

Rozwiązaniami są częstości własne (wartości własne)  $\omega_i$

Odpowiednie wektory własne nazywane są postaciami własnymi  $\{q\}_i$

Zwykle wektory własne normalizuje się:  $[q]_i \{q\}_j = [q]_i [I] \{q\}_j = \delta_{ij}$  lub  $[q]_i [M] \{q\}_j = \delta_{ij}$

Rozwiązanie jest znacznie bardziej czasochłonne niż rozwiązanie układu równań liniowych w analizie statycznej.

Do znalezienia ograniczonej liczby wartości własnych (częstości własnych) w interesującym zakresie stosuje się iteracyjne techniki numeryczne.

## Macierz masowa elementu skończonego

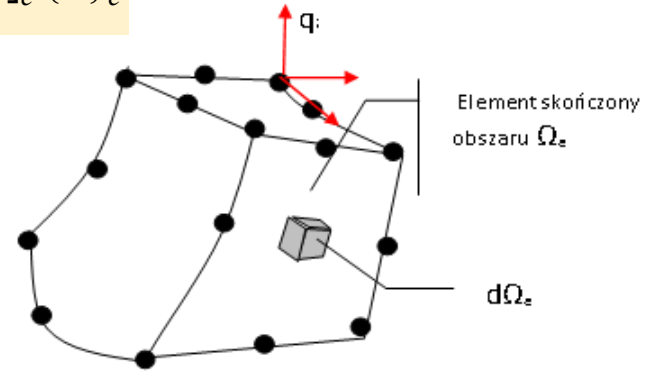
Zdefiniujmy energię kinetyczną elementu:  $T_e = \frac{1}{2} [\dot{q}]_e [m]_e \{\dot{q}\}_e$

Wektor przemieszczenia w elemencie:  $\{u\} = [N] \{q\}_e$

Wektor prędkości:  $\frac{d}{dt} \{u\} = [N] \{\dot{q}\}_e$

Energia kinetyczna części  $d\Omega_e$  elementu skończonego  $\Omega_e$ :

$$dT_e = \frac{1}{2} [\dot{u}] dm \{\dot{u}\} = \frac{1}{2} [\dot{u}] \rho \{\dot{u}\} d\Omega_e \quad \longrightarrow \quad dT_e = \frac{1}{2} [\dot{q}]_e [N]^T \cdot \rho [N] \{\dot{q}\}_e d\Omega_e$$



$$T_e = \frac{1}{2} [\dot{q}]_e \int_{\Omega_e} [N]^T \rho [N] d\Omega_e \{\dot{q}\}_e \quad - \text{energia kinetyczna elementu skończonego o objętości } \Omega_e$$

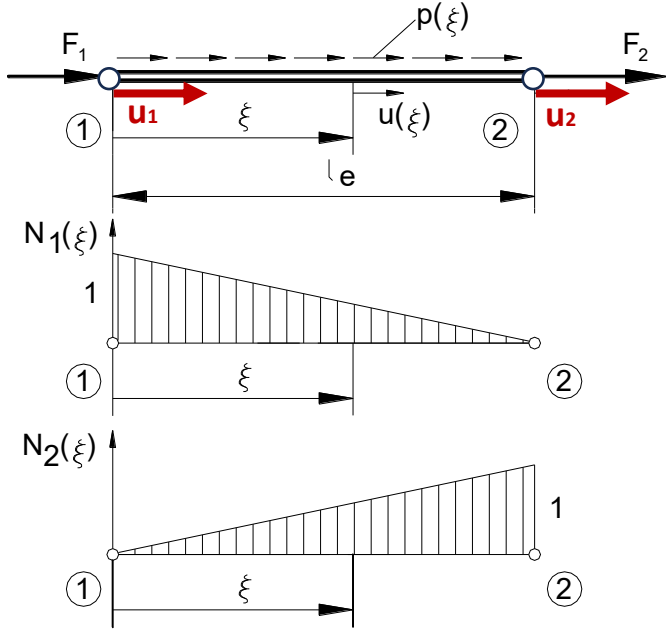
$$[m]_e = \int_{\Omega_e} [N]^T \rho [N] d\Omega_e$$

Ogólny wzór na macierz masową elementu skończonego:

Wyrażenie opisuje tak zwaną spójną macierz masową (*określoną przy użyciu tego samego podejścia co macierz sztywności*).

Aby uprościć obliczenia w algorytmach numerycznych można również użyć tak zwanej skupionej macierzy mas (diagonalnej)

# Element skończony pręta pod obciążeniami osiowymi (przypomnienie MES1)



Energia sprężysta elementu:

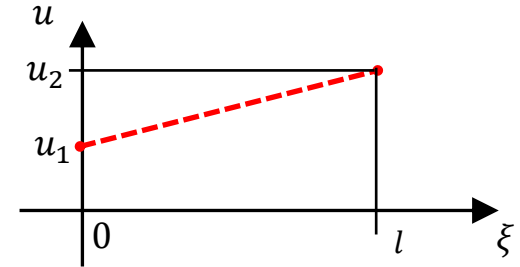
$$U_e = \frac{1}{2} A \int_0^{l_e} \sigma(\xi) \varepsilon(\xi) d\xi = \frac{EA}{2} \int_0^{l_e} (\varepsilon(\xi))^2 d\xi$$

$$U_e = \frac{EA}{2} \int_0^{l_e} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} N_1' \\ N_2' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_1' & N_2' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e d\xi =$$

$$= \frac{EA}{2} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}_e \int_0^{l_e} \begin{bmatrix} N_1' N_1' & N_1' N_2' \\ N_2' N_1' & N_2' N_2' \end{bmatrix} d\xi \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q \end{bmatrix}_e \begin{bmatrix} k \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} q \end{Bmatrix}_e,$$

Przemieszczenie osiowe:

$$u(\xi) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l_e} \xi$$



Wektor parametrów węzłowych:

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_e$$

Aproksymacja pola przemieszczeń osiowych:

$$u(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) u_1 + \frac{\xi}{l} u_2 = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & N_2(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \end{Bmatrix}_e$$

Wektor funkcji kształtu:

$$\begin{bmatrix} N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & N_2(\xi) \end{bmatrix}$$

Funkcje kształtu:

$$N_1(\xi) = 1 - \frac{\xi}{l_e}, \quad N_2(\xi) = \frac{\xi}{l_e}$$

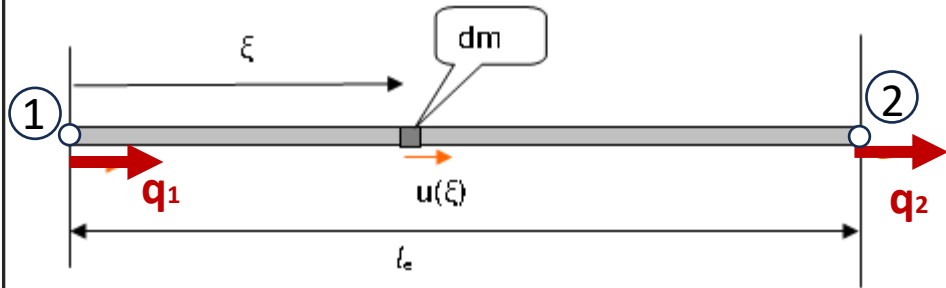
Odształcenie osiowe:

$$\varepsilon(\xi) = \frac{du}{d\xi} = \begin{bmatrix} N_1' & N_2' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e.$$

$$\begin{bmatrix} k \end{bmatrix}_e = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności elementu prętowego

## Macierz masowa dla elementu prętowego



Prędkość cząstek wzdłuż elementu:

Macierz mas dla elementu osiowego

$$T_e = \int_0^{l_e} \frac{dm(\dot{u})^2}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} (\dot{u})^2 \rho A d\xi$$

Po obliczeniu całek otrzymujemy:

$$T_e = \frac{1}{2} [\dot{q}_1, \dot{q}_2] [m]_e \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}$$

$$[m]_e = \int_{\Omega_e} \{N\} \rho [N] d\Omega_e \quad \longrightarrow$$

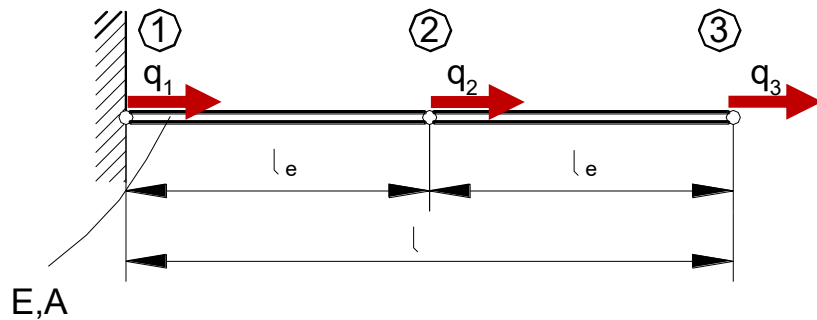
$$[m_e] = \frac{\rho A l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

*Konsystentna  
macierz masowa  
dla pręta*

Postać diagonalna (skupiona) macierzy:

$$[m]_e = \begin{bmatrix} \frac{\rho A l_e}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\rho A l_e}{2} \end{bmatrix}$$

**Przykład 1** swobodne drgania osiowe pręta zamocowanego na jednym końcu  
– model z 2 elementami



Rozwiązanie analityczne

$$\omega_i^s = \frac{2i-1}{2} \pi \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$



$$\omega_1^s = 1.5708 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

$$\omega_2^s = 4.7124 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

Rozwiązanie MES przy użyciu modelu z 2 elementami skończonymi

Równanie swobodnych drgań  $([K] - \omega^2 [M])\{q\} = \{0\}$

Macierz sztywności i macierz masowa dla obu elementów:

$$[k]_e = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [m]_e = \frac{\rho A l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad l_e = \frac{l}{2}$$

$$\left( \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho A l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left( \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho A l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\xrightarrow{q_1=0} \left( \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho A l_e}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

podstawiając:  $\lambda = \omega^2 \frac{\rho A l_e}{6} \frac{EA}{l_e} = \frac{\rho l_e^2}{6E} \omega^2$  mamy:  $\left( \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

rozwiązanie nietrywialne dla:  $\det \begin{bmatrix} 2-4\lambda & -(1+\lambda) \\ -(1+\lambda) & (1-2\lambda) \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 7\lambda^2 - 10\lambda + 1 = 0$   
 równanie charakterystyczne

Pierwiastki równania charakterystycznego macierzy:

$$\lambda_1 = 0.1082 \Rightarrow \omega_1 = 0.8057 \frac{1}{l_e} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 1.6114 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

$$\lambda_2 = 1.3204 \Rightarrow \omega_2 = 2.8148 \frac{1}{l_e} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5.6293 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Porównanie z dokładnym rozwiązaniem

$$\omega_1^s = 1.5708 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

$$\omega_2^s = 4.7124 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

mamy względne błędy  
 częstości własnych  
 wynoszące 2,6% i 19,5%.

Pierwiastki równania charakterystycznego macierzy:  $\begin{cases} \lambda_1 = 0.1082 \\ \lambda_2 = 1.3204 \end{cases}$

Wektory własne:

$$\left( \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 - 4\lambda & -(1 + \lambda) \\ -(1 + \lambda) & (1 - 2\lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} q_2 = \frac{(1+\lambda)}{2(1-2\lambda)} \cdot q_3 \\ q_2 = \frac{(1-2\lambda)}{(1+\lambda)} \cdot q_3 \end{cases}$$

Uwzględniając, że  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$  i przyjmując, że  $\mathbf{q}_3 = \Delta$  mamy, dla kolejnych pierwiastków równania charakterystycznego macierzy:

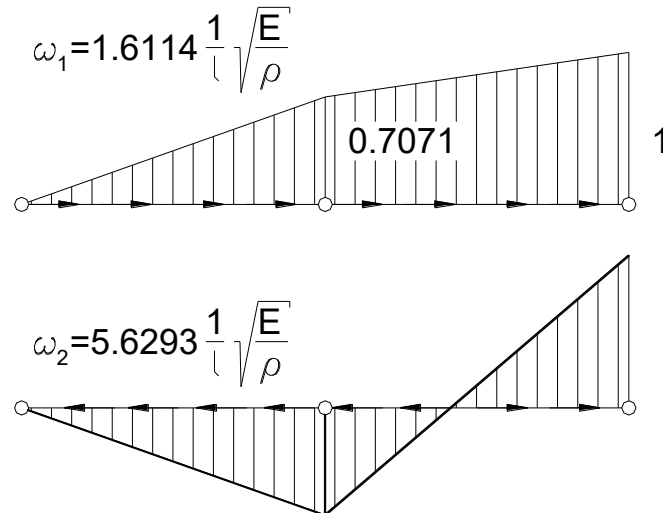
$$\lambda_1 = 0.1082 \Rightarrow \begin{cases} q_2 = \frac{(1+\lambda_1)}{2(1-2\lambda_1)} \cdot \Delta \\ q_2 = \frac{(1-2\lambda_1)}{(1+\lambda_1)} \cdot \Delta \end{cases} = 0.707 \cdot \Delta$$

$$\lambda_2 = 1.3204 \Rightarrow \begin{cases} q_2 = \frac{(1+\lambda_2)}{2(1-2\lambda_2)} \cdot \Delta \\ q_2 = \frac{(1-2\lambda_2)}{(1+\lambda_2)} \cdot \Delta \end{cases} = -0.707 \cdot \Delta$$

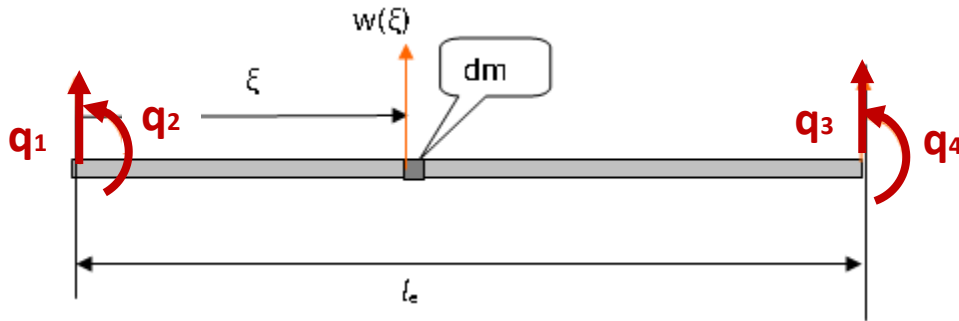
Mamy zatem postaci drgań:  
(wektory własne)

$$\lfloor \mathbf{q} \rfloor_1 = \lfloor 0, \quad 0.707\Delta, \quad \Delta \rfloor$$

$$\lfloor \mathbf{q} \rfloor_2 = \lfloor 0, \quad -0.707\Delta, \quad \Delta \rfloor$$



# Macierz masowa prostego elementu belkowego



Energia kinetyczna segmentu  $d\xi$  belki

$$dT_e = dm \cdot (\dot{w})^2 / 2$$

*(bez ruchu obrotowego)*

Prędkość segmentu:

$$\dot{w}(\xi) = [N_1(\xi), N_2(\xi), N_3(\xi), N_4(\xi)] \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{Bmatrix}$$

funkcje kształtu elementu belki:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= 1 - 3\frac{\xi^2}{l_e^2} + 2\frac{\xi^3}{l_e^3}, \\ N_2(\xi) &= \xi - 2\frac{\xi^2}{l_e} + \frac{\xi^3}{l_e^2}, \\ N_3(\xi) &= 3\frac{\xi^2}{l_e^2} - 2\frac{\xi^3}{l_e^3}, \\ N_4(\xi) &= -\frac{\xi^2}{l_e} + \frac{\xi^3}{l_e^2}. \end{aligned}$$

Energia kinetyczna:

$$T_e = \int_0^{l_e} dT_e = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} (\dot{w})^2 \rho A d\xi$$

$$T_e = \frac{1}{2} [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4] \cdot \frac{\rho A l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ sym. & & 156 & -22l_e \\ & & & 4l_e^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{Bmatrix}$$

konsystentna macierz masowa belki:

$$[m]_e = \frac{\rho A l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ sym. & & 156 & -22l_e \\ & & & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

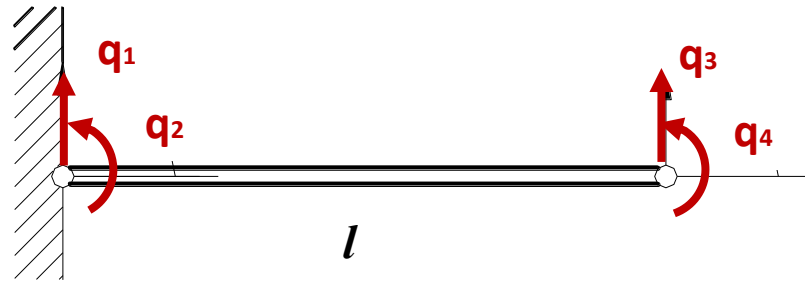
Ten sam wynik można uzyskać stosując ogólny wzór:  $[m]_e = \int_{\Omega_e} [N]^T \rho [N] d\Omega_e$

**Przykład 2** – Obliczyć częstotliwości drgań własnych belki wspornikowej o długości  $l$ , wykorzystując model w postaci jednego elementu belkowego.

Jednoelementowy model MES:

UWAGA –

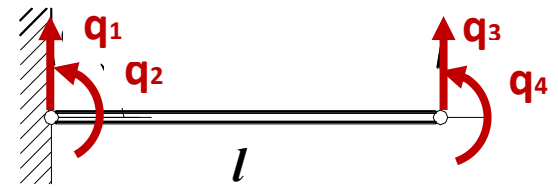
- 1) bez rotacji,
- 2) są tylko 2 masowe stopnie swobody



Dokładne rozwiązanie analityczne:

$$\omega_1^s = 3.5156 \cdot \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}},$$
$$\omega_2^s = 22.0346 \cdot \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}},$$
$$\omega_i^s = \left[ \frac{(2i-1)\pi}{2} \right]^2 \cdot \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad i = 3, 4, \dots$$

# Rozwiązanie MES - problem na wartości własne



Równanie swobodnych drgań:  $([K] - \omega^2 [M])\{q\} = \{0\}$

dla belki:

$$\left( \begin{array}{c|c|c|c} \frac{2EI}{l^3} & 6 & 3l & -6 & 3l \\ & & 2l^2 & -3l & l^2 \\ & & & 6 & -3l \\ & & & & 2l^2 \\ \hline & \text{sym.} & & & \\ \hline & & & & \end{array} - \omega^2 \frac{\rho Al}{420} \begin{array}{c|c|c|c} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ & & 156 & -22l \\ & & & 4l^2 \\ \hline & \text{sym.} & & \\ \hline & & & & \end{array} \right) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Warunki brzegowe:  $q_1 = 0$  i  $q_2 = 0$

$$\left( \begin{array}{c|c|c} \frac{2EI}{l^3} & 6 & -3l \\ & -3l & 2l^2 \\ \hline & & \end{array} - \frac{\omega^2 \rho Al}{420} \begin{array}{c|c} 156 & -22l \\ -22l & 4l^2 \end{array} \right) \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \iff \det \left( \left[ \begin{array}{c|c} 6 & -3l \\ -3l & 2l^2 \end{array} \right] - \lambda \left[ \begin{array}{c|c} 156 & -22l \\ -22l & 4l^2 \end{array} \right] \right) = 0$$

Korzystanie z nowego parametru:  $\lambda = \frac{\rho Al^4}{840EI} \cdot \omega^2$

otrzymujemy równanie charakterystyczne:

$$140\lambda^2 - 204\lambda + 3 = 0$$

i pierwiastki:  $\lambda_1 = 1.4857 \cdot 10^{-2}$ ,  
 $\lambda_2 = 1.4423$ .

$$\omega_1 = 3,533 \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}},$$

$$\omega_2 = 34,81 \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}.$$

analityczne:

$$\omega_1^s = 3.5156 \cdot \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}},$$

$$\omega_2^s = 22.0346 \cdot \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}},$$

błąd:

0.5%

58%

Pierwiastki równania charakterystycznego macierzy:  $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 1.4857 \cdot 10^{-2}, \\ \lambda_2 = 1.4423. \end{array} \right.$

Wektory własne:

$$\left[ \begin{array}{c|c} 6-156\lambda & -3l+22l\lambda \\ \hline -3l+22l\lambda & 2l^2-4l^2\lambda \end{array} \right] \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$q_4 = \frac{-(6-156\lambda)}{(-3+22\lambda)} \cdot \frac{q_3}{l}$$

$$q_4 = \frac{-3+22\lambda}{-2+4\lambda} \cdot \frac{q_3}{l}$$

Zakładając  $q_3 = \Delta$

$$[q]_1 = [q_3, q_4]_1 \rightarrow \omega_1 \xrightarrow{\lambda_1 = 1.4857 \cdot 10^{-2}} q_4 = 1.38 \frac{\Delta}{l}$$

$$[q]_2 = [q_3, q_4]_2 \rightarrow \omega_2 \xrightarrow{\lambda_2 = 1.4423} q_4 = 7.62 \cdot \frac{\Delta}{l}$$

dla pierwszej postaci

$$[q]_1 = \left[ 0, 0, \Delta, 1.38 \frac{\Delta}{l} \right],$$

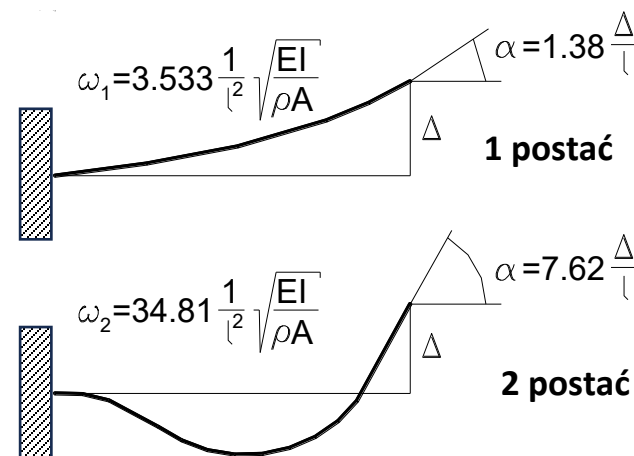
dla drugiej postaci

$$[q]_2 = \left[ 0, 0, \Delta, 7.62 \frac{\Delta}{l} \right].$$

**W ANALIZIE MODALNEJ MES:**

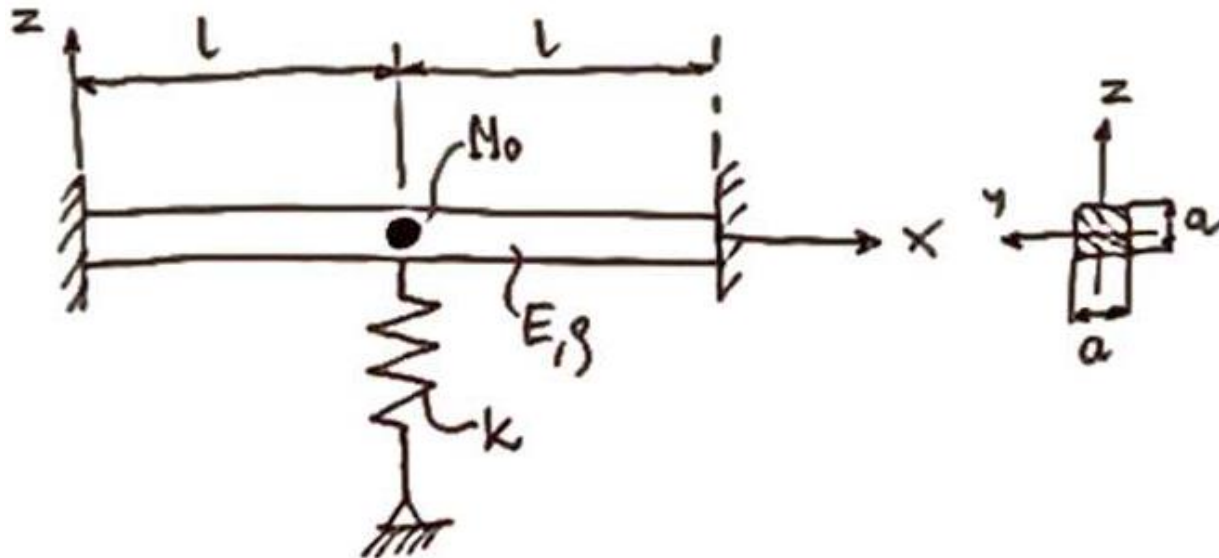
Dobra dokładność wyników (*częstości własne i postaci drgań*) nawet w przypadku zgrubnego tworzenia siatki.

Zwykle lepsza dokładność odpowiada niższej częstości



**Przykład 3.** Zbuduj model elementów skończonych analizy modalnej struktury 2D składającej się z belki, sprężyny i masy  $M_0$ . Belka jest reprezentowana przez 2 elementy skończone.

Znajdź częstotliwości własne ( $f_1, f_2$ ) i odpowiadające im wektory własne. Narysuj postać drgań. Oblicz minimalną wartość sztywności sprężyny, tak aby postać drgań o zerowym przesunięciu masy  $M_0$  stał się pierwszą postacią drgań.



$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$L = 1000 \text{ mm}$$

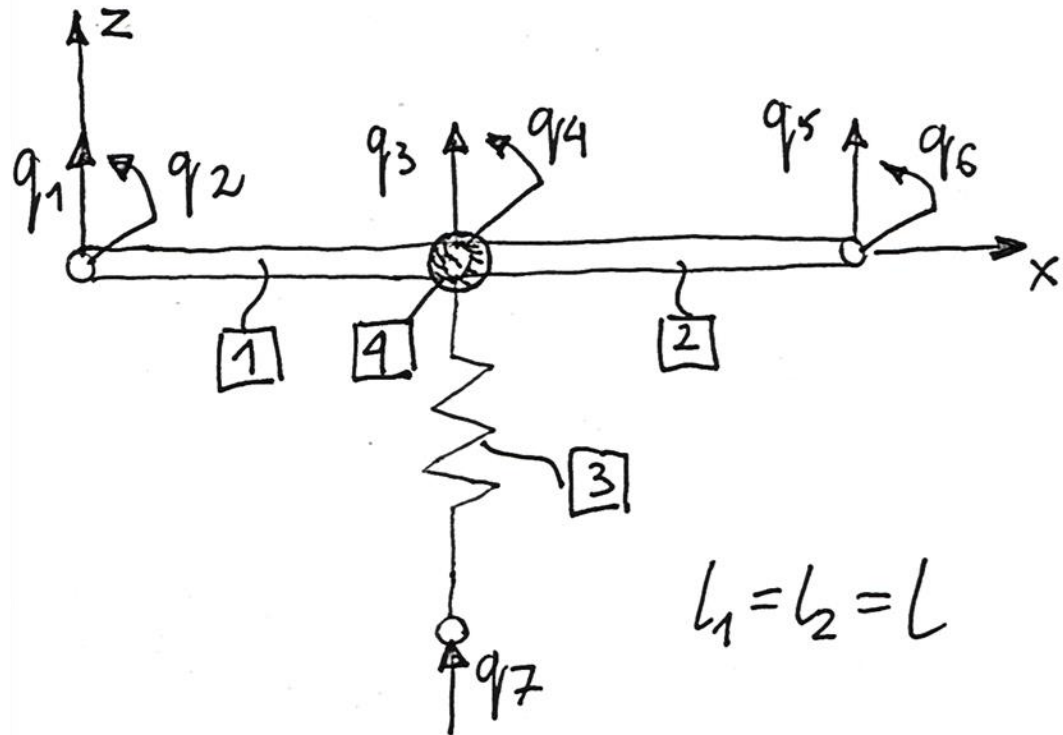
$$a = 40 \text{ mm}$$

$$\rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$M_0 = 20 \text{ kg}$$

$$k = 5000 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$A = a^2, \quad J_y = \frac{a^4}{12}$$



$$L_1 = L_2 = L$$

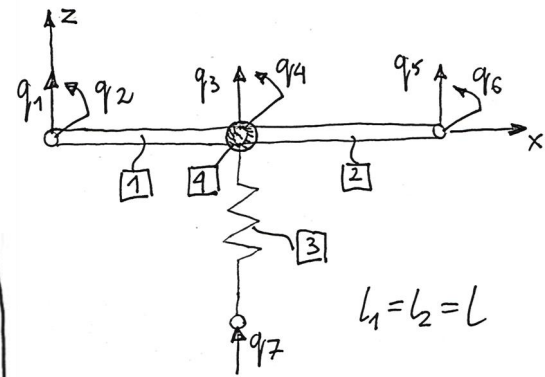
Globalny wektor parametrów węzłowych:

$$\underset{1 \times 7}{Lq} = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7]$$

Lokalna macierz sztywności:

$$[k]_1 = [k]_2 = \frac{2EJy}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} = \frac{Ea^4}{6l^3} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix}$$

$$[k]_3 = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad [k]_4 = [0]$$

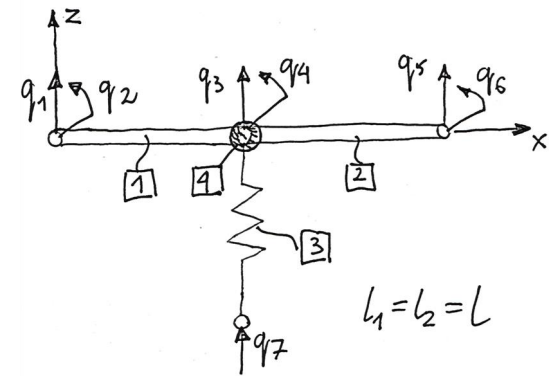


Lokalna macierz masowa:

$$[m]_1 = [m]_2 = \frac{5a^2l}{420} \cdot \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$[m]_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [m]_4 = [M_0]$$

Rozszerzone macierze sztywności:



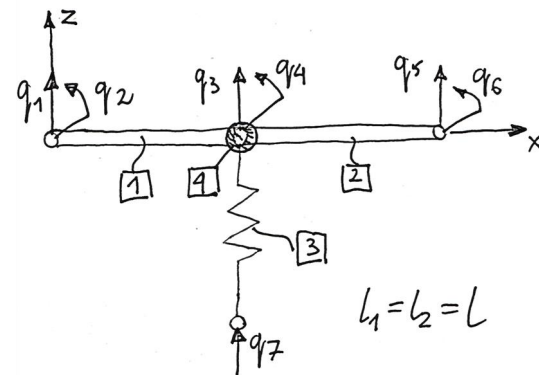
$$[k]_1^* = \begin{bmatrix} \text{hatched } 4 \times 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$; [k]_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{hatched } 4 \times 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k]_3^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$$; [k]_4^* = [0]$$

Rozszerzone macierze masowe:



$$[m]_1^* = \begin{bmatrix} \boxed{[m]_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

;

$$[m]_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{[m]_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

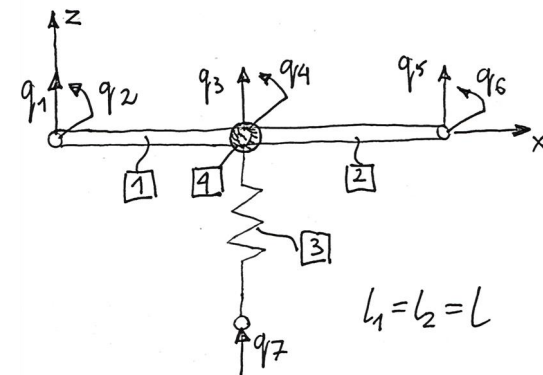
$$[m]_3^* = [0]$$

,

$$[m]_4^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Globalna macierz sztywności:

$$[K]_{7 \times 7} = \begin{bmatrix} [k]_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & -k \\ 0 & 0 & [k]_2 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

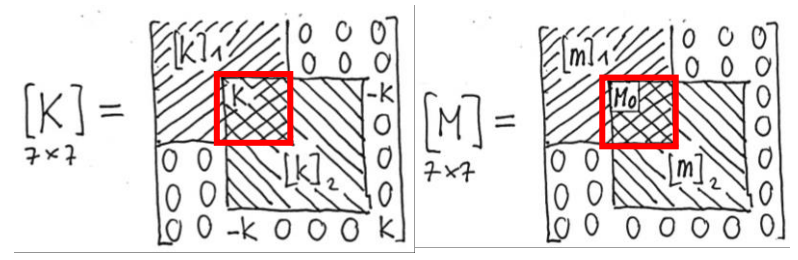


Globalna macierz masowa:

$$[M]_{7 \times 7} = \begin{bmatrix} [m]_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [m]_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Warunki brzegowe:

$$q_1 = 0, q_2 = 0, q_5 = 0, q_6 = 0, q_7 = 0$$



Układ równań:  $([K] - \omega^2 [M])\{q\} = \{0\}$

$$\left( \begin{array}{c|c} k_{33-1} + k_{11-2} + k & k_{34-1} + k_{12-2} \\ \hline k_{43-1} + k_{21-2} & k_{44-1} + k_{22-2} \end{array} \right) - \omega^2 \left( \begin{array}{c|c} m_{33-1} + m_{11-2} + M_0 & m_{34-1} + m_{12-2} \\ \hline m_{43-1} + m_{21-2} & m_{44-1} + m_{22-2} \end{array} \right) \cdot \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$k_{33-1} + k_{11-2} + k = \frac{6Ea^4}{6L^3} + \frac{6Ea^4}{6L^3} + k = \frac{2Ea^4}{L^3} + k$$

$$k_{34-1} + k_{12-2} = -\frac{3L \cdot Ea^4}{6L^3} + \frac{3LEa^4}{6L^3} = 0 = k_{43-1} + k_{21-2}$$

$$k_{44-1} + k_{22-2} = \frac{2L^2 \cdot Ea^4}{6L^3} + \frac{2L^2 Ea^4}{6L^3} = \frac{2Ea^4}{3L}$$

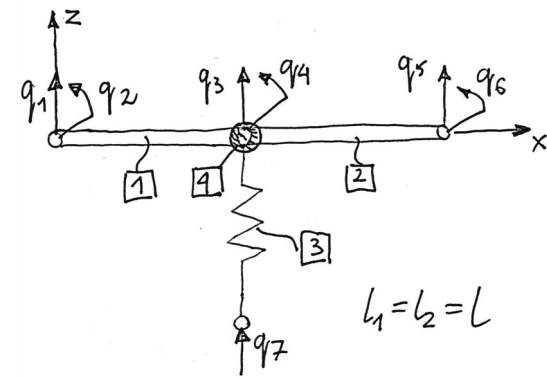
$$m_{33-1} + m_{11-2} + M_0 = \frac{156 \cdot \rho a^2 L}{420} + \frac{156 \rho a^2 L}{420} + M_0 = \frac{26 \rho a^2 L}{35} + M_0$$

$$m_{34-1} + m_{12-2} = -\frac{22L \cdot \rho a^2 L}{420} + \frac{22L \cdot \rho a^2 L}{420} = 0 = m_{43-1} + m_{21-2}$$

$$m_{44-1} + m_{22-2} = \frac{4L^2 \rho a^2 L}{420} + \frac{4L^2 \rho a^2 L}{420} = \frac{2 \rho a^2 L^3}{105}$$

$$\left( \begin{array}{c|c} \frac{2Ea^4}{L^3} + k & 0 \\ \hline 0 & \frac{2Ea^4}{3L} \end{array} \right) - \omega^2 \left( \begin{array}{c|c} \frac{26 \rho a^2 L}{35} + M_0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2 \rho a^2 L^3}{105} \end{array} \right) \cdot \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2Ea^4}{l^3} + k & 0 \\ 0 & \frac{2Ea^4}{3l} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{26 \rho a^2 l}{35} + M_0 & 0 \\ 0 & \frac{2 \rho a^2 l^3}{105} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



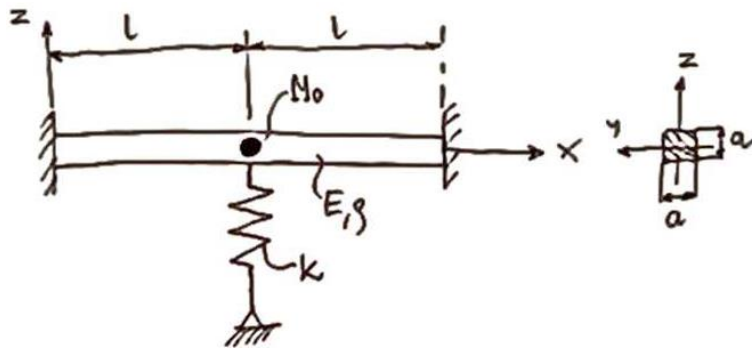
$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0$$



$$\left\{ \left( \frac{2Ea^4}{l^3} + k \right) - \omega^2 \left( \frac{26 \rho a^2 l}{35} + M_0 \right) \right\} \cdot \left( \frac{2Ea^4}{3l} - \omega^2 \cdot \frac{2 \rho a^2 l^3}{105} \right) = 0.$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\frac{2Ea^4}{l^3} + k}{\frac{26 \rho a^2 l}{35} + M_0}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\frac{2Ea^4}{3l}}{\frac{2 \rho a^2 l^3}{105}}} = \frac{a}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{35E}{\rho}}$$



Częstotliwość drgań:

$$f = \omega / 2\pi$$

częstość własna

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$L = 1000 \text{ mm}$$

$$a = 40 \text{ mm}$$

$$\rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$M_0 = 20 \text{ kg}$$

$$k = 5000 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$A = a^2, \quad J_y = \frac{a^4}{12}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\frac{2Ea^4}{L^3} + k}{\frac{26\rho a^2 L}{35} + M_0}}$$

$$= 453.7 \text{ 1/s}$$

$$f_1 = 72.2 \text{ Hz}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\frac{2Ea^4}{3L}}{\frac{2\rho a^2 L^3}{105}}} = \frac{a}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{35E}{\rho}} = 1198.3 \text{ 1/s}$$

$$f_2 = 190.71 \text{ Hz}$$

Wektory własne:

$$\begin{pmatrix} \frac{2Ea^4}{l^3} + k & 0 \\ 0 & \frac{2Ea^4}{3L} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} \frac{26\varrho a^2 L}{35} + M_0 & 0 \\ 0 & \frac{2\varrho a^2 l^3}{105} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2Ea^4}{l^3} + k - \omega^2 \frac{26\varrho a^2 L}{35} + M_0 & 0 \\ 0 & \frac{2Ea^4}{3L} - \omega^2 \frac{2\varrho a^2 l^3}{105} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oznaczmy:

$$\Phi(\omega_i) = \frac{2Ea^4}{l^3} + k - \omega_i^2 \left( \frac{26\varrho a^2 L}{35} + M_0 \right)$$

$$\Psi(\omega_i) = \frac{2Ea^4}{3L} - \omega_i^2 \cdot \frac{2\varrho a^2 l^3}{105}$$

Mamy zatem:

$$\begin{cases} \Phi(\omega_i) \cdot q_3(\omega_i) + 0 \cdot q_4(\omega_i) = 0 \\ 0 \cdot q_3(\omega_i) + \Psi(\omega_i) \cdot q_4(\omega_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi(\omega_i) \cdot q_3(\omega_i) + 0 \cdot q_4(\omega_i) = 0 \\ 0 \cdot q_3(\omega_i) + \Psi(\omega_i) \cdot q_4(\omega_i) = 0 \end{cases}$$

$\underline{I} + \underline{II} :$

$$\Phi(\omega_i) \cdot q_3(\omega_i) + \Psi(\omega_i) \cdot q_4(\omega_i) = 0$$

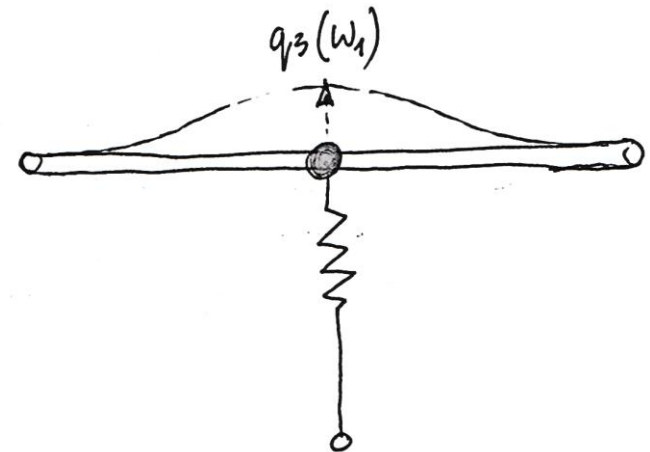
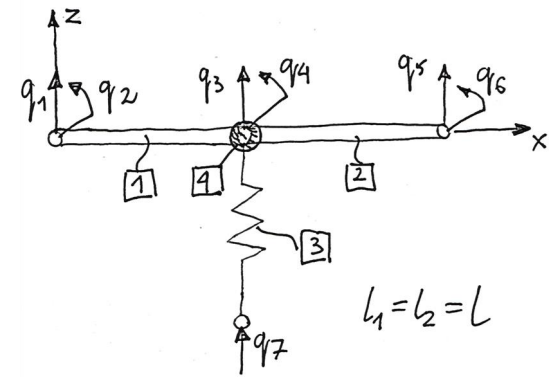
for  $\omega_1$  :  $\Phi(\omega_1) = 0$  ,  $\Psi(\omega_1) \neq 0$

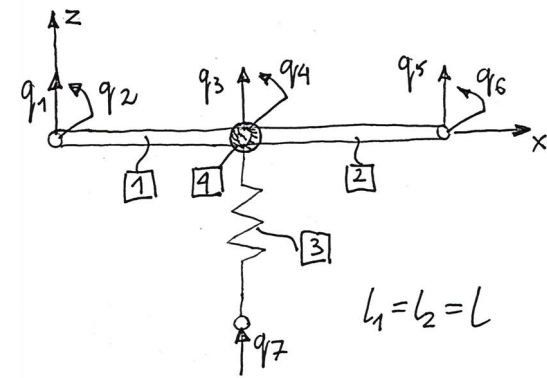
$$0 \cdot q_3(\omega_1) + \Psi(\omega_1) \cdot q_4(\omega_1) = 0$$

↳ any real value    ↳ = 0

1st vibration mode

$$f_1 = 72.2 \text{ Hz}$$





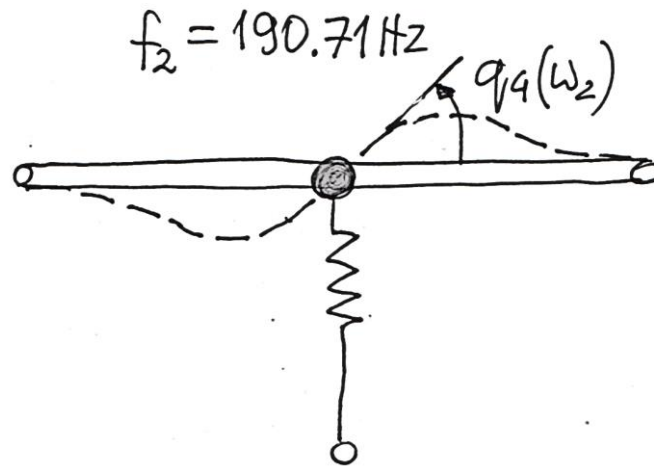
for  $\omega_2$  :

$$\bar{\Phi}(\omega_2) \neq 0, \quad \Psi(\omega_2) = 0$$

$$\bar{\Phi}(\omega_2) \cdot \underbrace{q_3(\omega_2)}_{=0} + 0 \cdot q_4(\omega_2) = 0$$

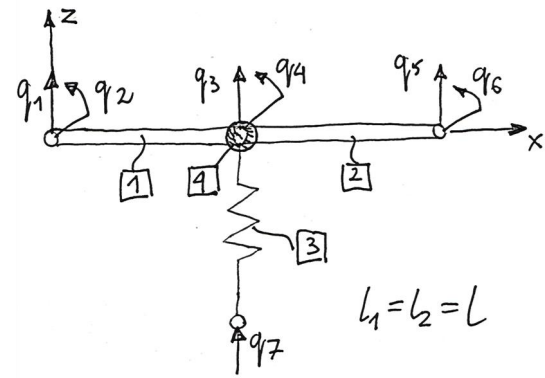
$\hookrightarrow$  any real value

2nd vibration mode



$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\frac{2Ea^4}{L^3} + k}{\frac{26 \rho a^2 L}{35} + M_0}}$$

$$\omega_2 = \frac{a}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{35E}{\rho}}$$



b) for  $\omega_2$  Mass  $M_0$  only rotates:

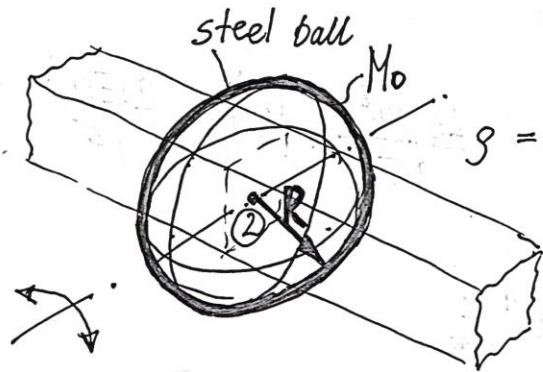
$$\tilde{\omega}_1^2 > \omega_2^2$$

$$\frac{\frac{2Ea^4}{L^3} + \tilde{k}}{\frac{26 \rho a^2 L}{35} + M_0} > \frac{35Ea^2}{\rho L^4}$$

$$\tilde{k} > \frac{35Ea^2}{\rho L^4} \cdot \left( \frac{26 \rho a^2 L}{35} + M_0 \right) - \frac{2Ea^4}{L^3}$$

$$\tilde{k} > 4.1 \cdot 10^4 \frac{N}{mm}$$

if the moment of inertia is considered :



$$\rho = \frac{M_0}{V} = \frac{3M_0}{4\pi R^3} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3M_0}{4\pi \rho}} = 85 \text{ mm}$$

$$J_0 = \frac{2}{5} M_0 \cdot R^2 = \frac{2}{5} \cdot 0.02 \frac{\text{Ns}^2}{\text{mm}} \cdot 85^2 \text{ mm}^2 = 57.8 \text{ Ns}^2 \text{ mm}$$

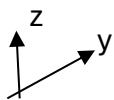
$$[m']_4^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2' = \sqrt{\frac{\frac{2Ea^4}{3L}}{\frac{2\rho a^2 L^3}{105} + J_0}} = 1074.7 \text{ } \frac{1}{\text{s}}$$

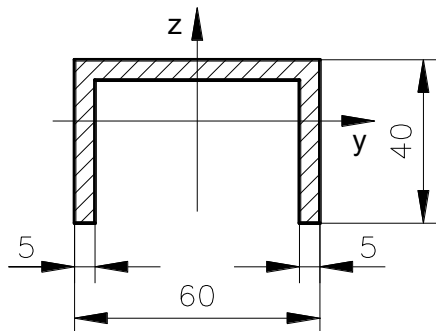
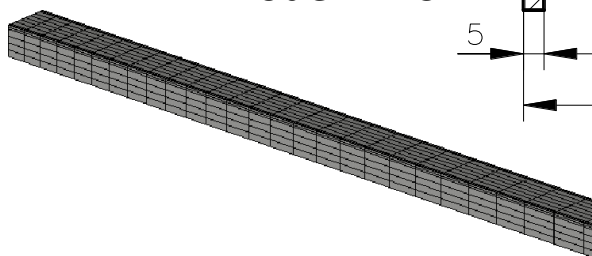
$$f_2' = 171 \text{ Hz}$$

$$k_1' > \frac{\frac{2Ea^4}{3L}}{\frac{2\rho a^2 L^3}{105} + J_0} \left( \frac{26\rho a^2 L}{35} + M_0 \right) - \frac{2Ea^4}{L^3}, \quad k_1' > 3.28 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

# Przykład 4a – drgania swobodne belki wspornikowej – postaci drgań własnych i częstości drgań własnych



model MES



$$E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu=0.3$$

$$\rho=8 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

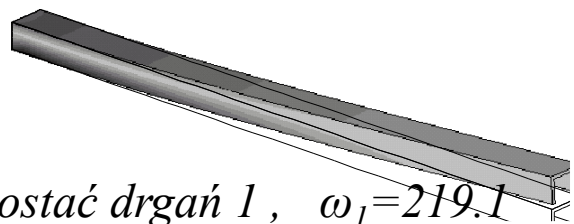
Dokładne rozwiązanie analityczne tylko dla postaci giętych:

$$\omega_1^s = 3.5156 \cdot \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}},$$

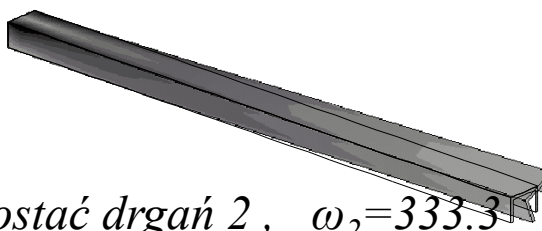
$$\omega_2^s = 22.0346 \cdot \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}},$$

$$\omega_i^s = \left[ \frac{(2i-1)\pi}{2} \right]^2 \cdot \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad i = 3, 4, \dots$$

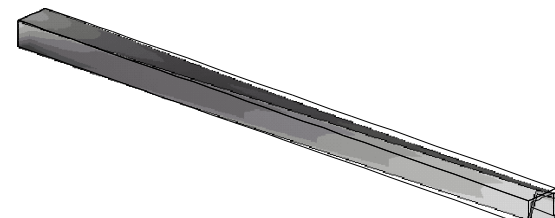
postać drgań 1,  $\omega_1=219.1$   
drgania gięte w pł. xz



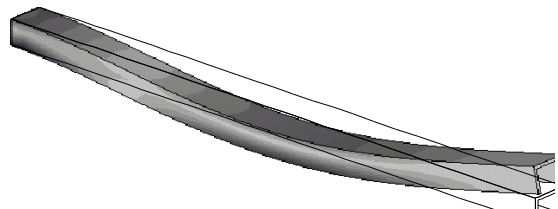
postać drgań 2,  $\omega_2=333.3$   
drgania skrętne



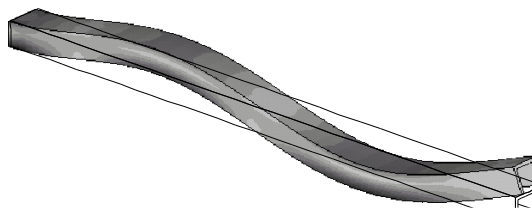
postać drgań 3,  $\omega_3=769.5$   
drgania giętno-skrętne



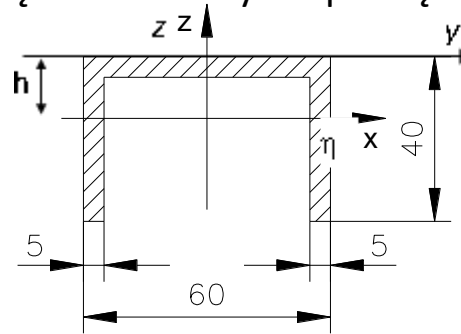
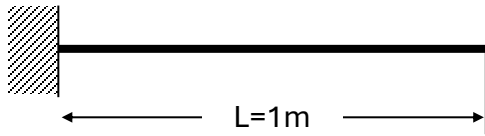
postać drgań 4,  $\omega_4=1353.73$   
drgania gięte w pł. xz



postać drgań 5,  $\omega_5=3704.3$   
drgania gięte w pł. xz



# Przykład 4b Znajdź pierwszych 8 częstości własnych i powiązane postaci własne belki wspornikowej



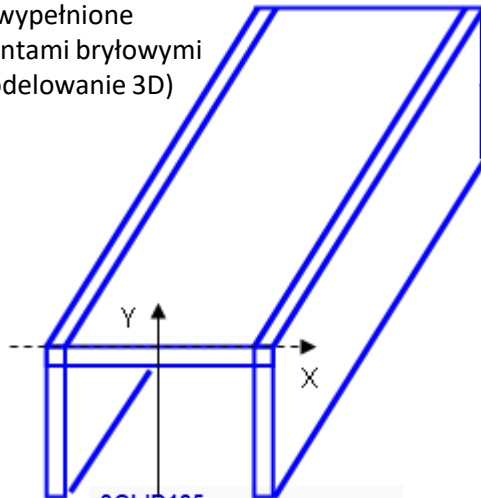
$E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$   
 $\nu=0.3$   
 $\rho=8 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$   
 $J=J_{\eta}=1.0097 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$   
 $A=0.6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$      $h=13.27 \text{ mm}$

$$\omega = 2\pi f$$


## Trzy sposoby modelowania zadania

**Zad. 1**

Wyciągnięcie powierzchni daje bryły, wypełnione elementami bryłowymi (modelowanie 3D)

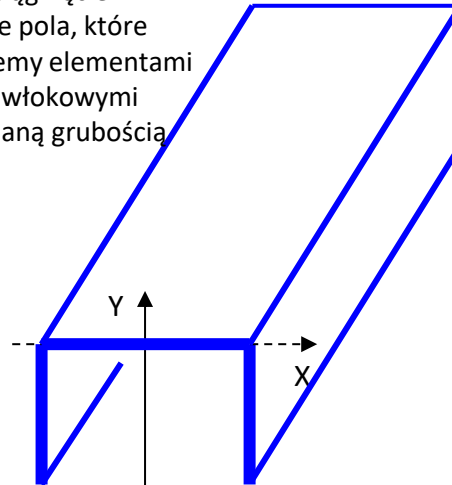


**SOLID185**  
 3-D 8-Node Structural Solid  
 8 nodes 3-D space  
 DOF: UX, UY, UZ

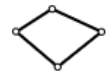


**Zad. 2**

Wyciągnięcie linii daje pola, które pokryjemy elementami powłokowymi z zadaną grubością

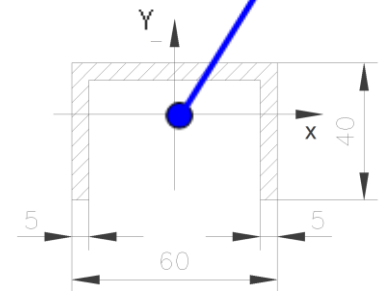


**SHELL181**  
 4-Node Structural Shell  
 4 nodes 3-D space  
 DOF: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ




**Zad. 3**

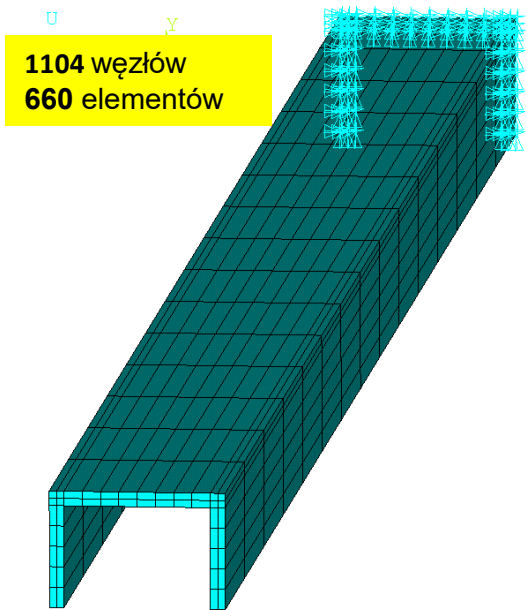
Wyciągnięcie punktu daje linię, której przypiszemy *section* definiujący cechy przekroju



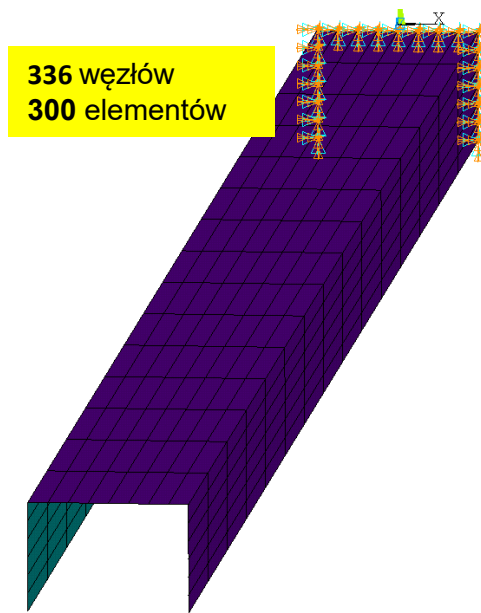
**BEAM188**  
 Structural 3-D 2-Node Beam  
 2 nodes 3-D space  
 DOF: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ



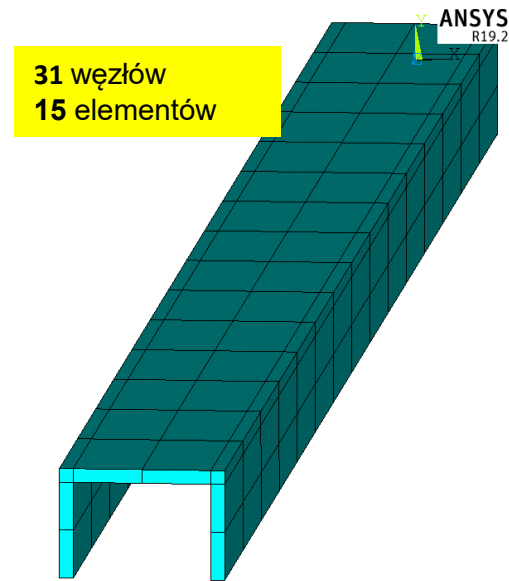
**UWAGA na wybór jednostek: SI (N, m, s, kg) lub mod\_SI (N, mm, s, t)**



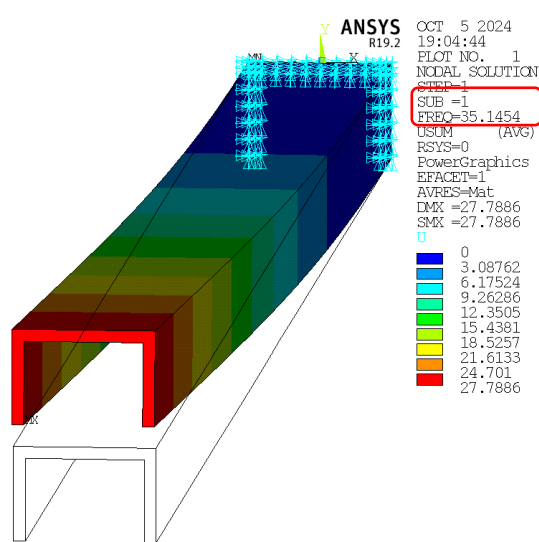
Ceowka 3D



$\omega_{analit1} = 219 \text{ rad/s}$

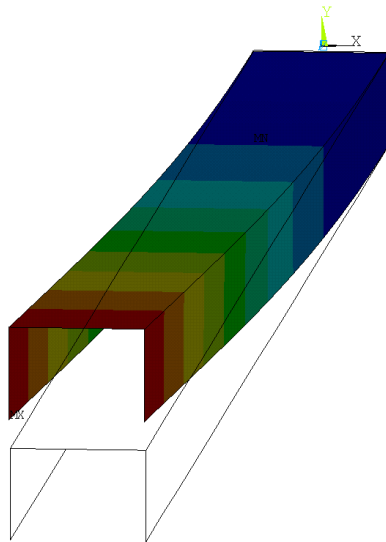


Ceowka beam



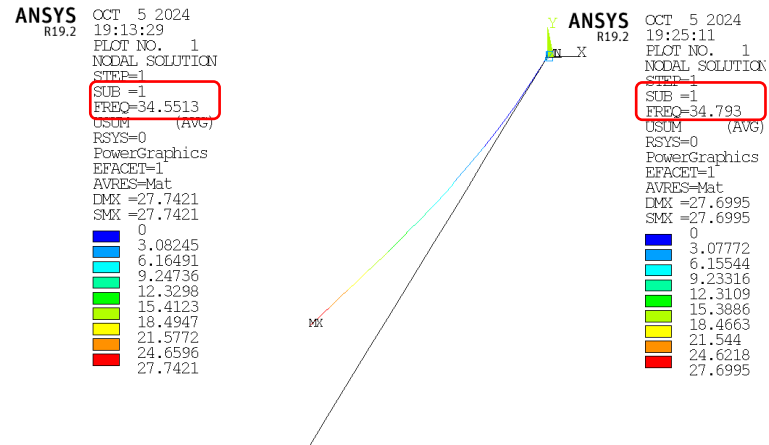
Ceowka 3D

$\omega_1 = 2\pi f = 221 \text{ rad/s}$



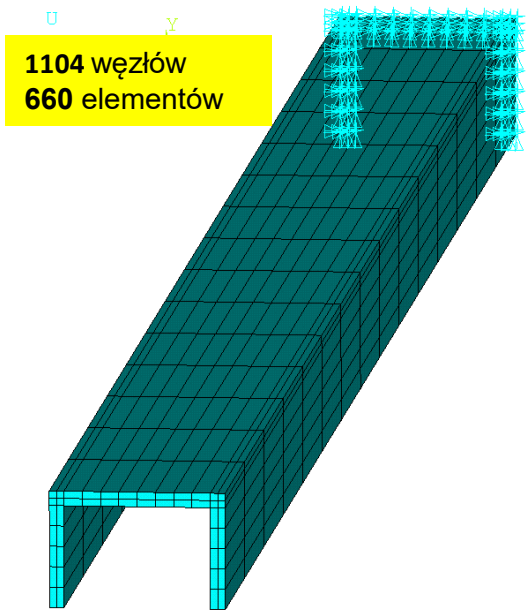
Ceowka shell

$\omega_1 = 2\pi f = 217 \text{ rad/s}$



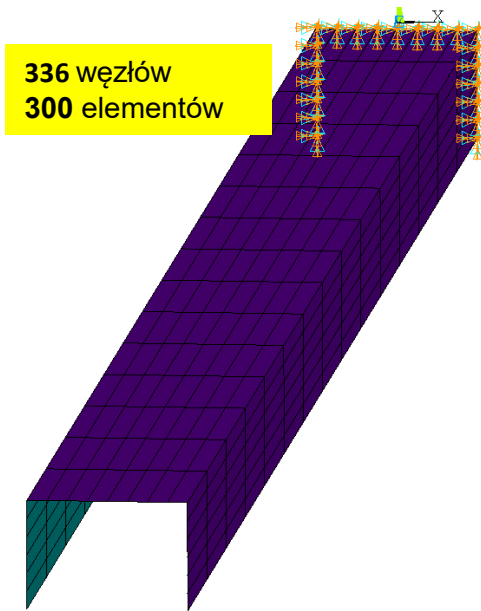
beam

$\omega_1 = 2\pi f = 218.5 \text{ rad/s}$



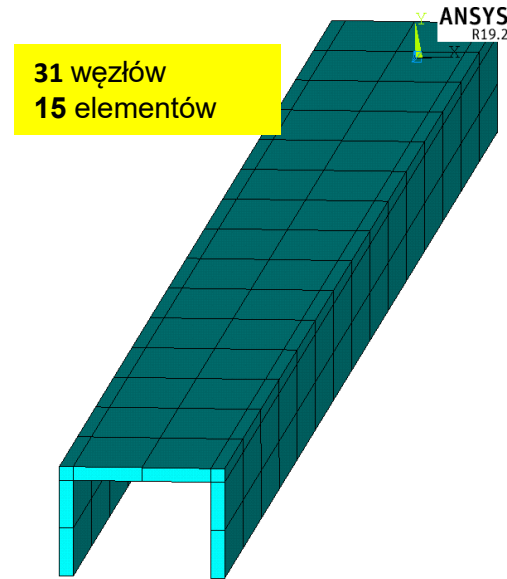
1104 węzłów  
660 elementów

Ceowka 3D



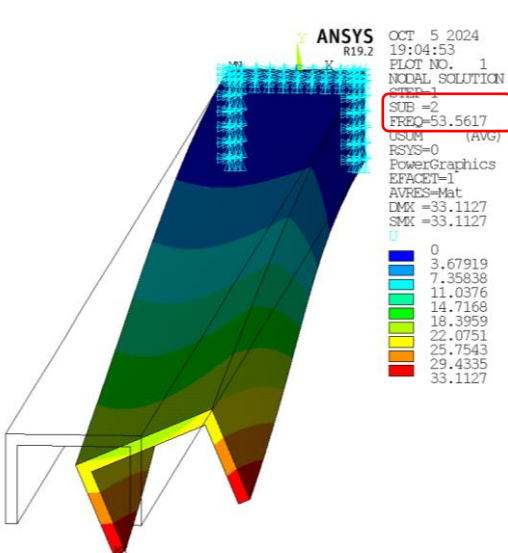
336 węzłów  
300 elementów

Ceowka shell



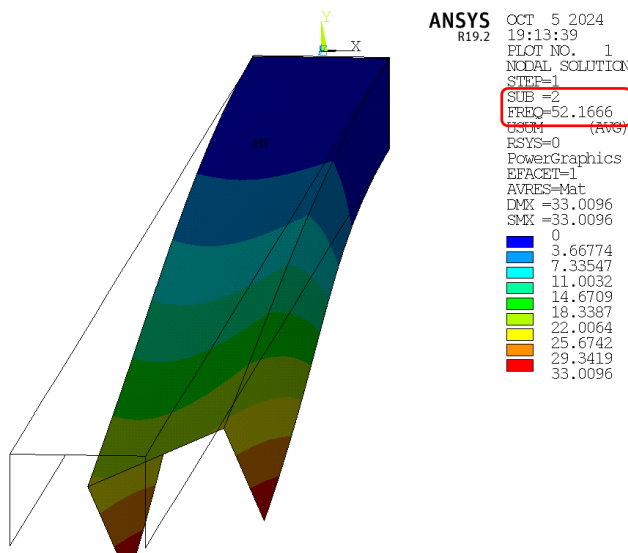
31 węzłów  
15 elementów

Ceowka beam



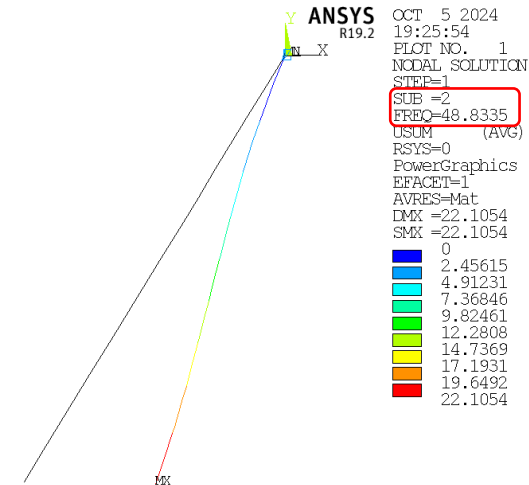
ANSYS R19.2  
OCT 5 2024  
19:04:53  
PLOT NO. 1  
NODAL SOLUTION  
STEP=1  
SUB =2  
FREQ=53.5617  
USUM (AVG)  
RSYS=0  
PowerGraphics  
EFACET=1  
AVRES=Mat  
DMX =33.1127  
SMX =33.1127

$$\omega_2 = 2\pi f = 336 \text{ rad/s}$$



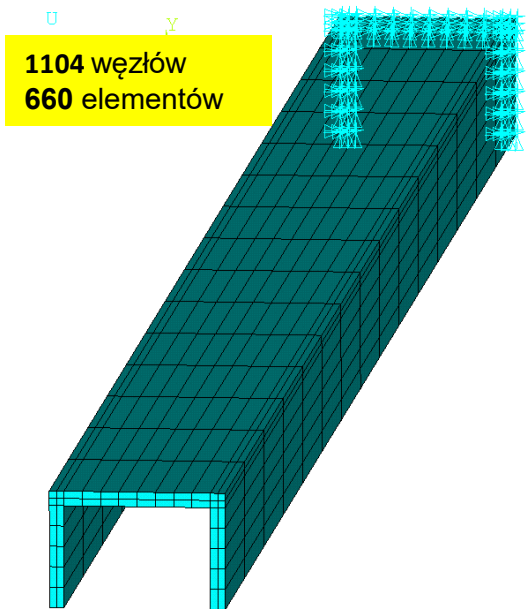
ANSYS R19.2  
OCT 5 2024  
19:13:39  
PLOT NO. 1  
NODAL SOLUTION  
STEP=1  
SUB =2  
FREQ=52.1666  
USUM (AVG)  
RSYS=0  
PowerGraphics  
EFACET=1  
AVRES=Mat  
DMX =33.0096  
SMX =33.0096

$$\omega_2 = 2\pi f = 328 \text{ rad/s}$$

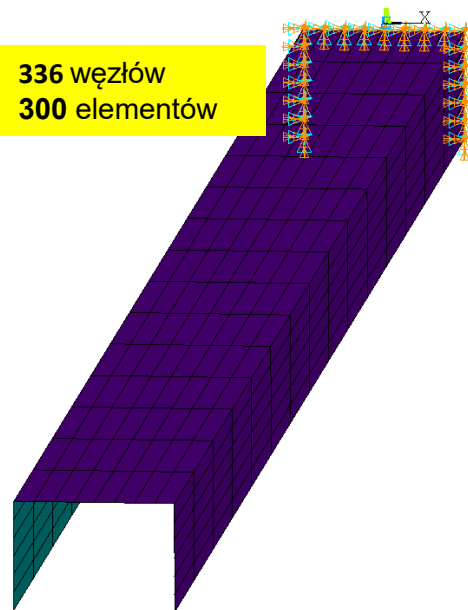


ANSYS R19.2  
OCT 5 2024  
19:25:54  
PLOT NO. 1  
NODAL SOLUTION  
STEP=1  
SUB =2  
FREQ=48.8335  
USUM (AVG)  
RSYS=0  
PowerGraphics  
EFACET=1  
AVRES=Mat  
DMX =22.1054  
SMX =22.1054

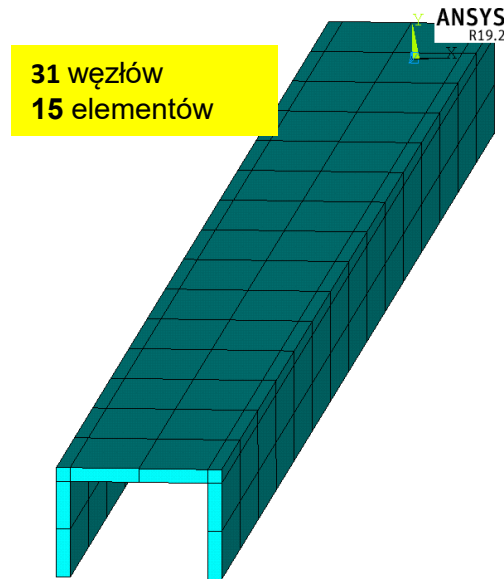
$$\omega_2 = 2\pi f = 307 \text{ rad/s}$$



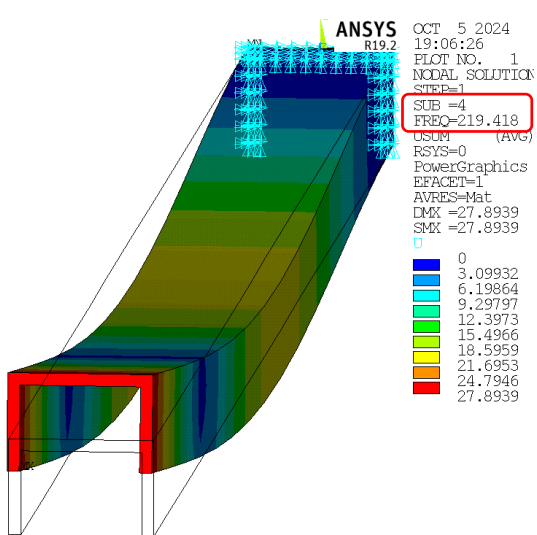
Ceowka 3D



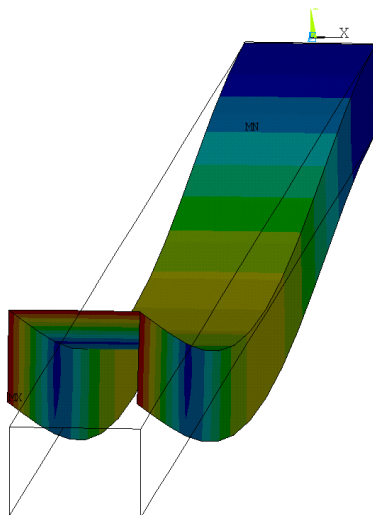
$$\omega_{analit2} = 1373 \text{ rad/s}$$



Ceowka beam

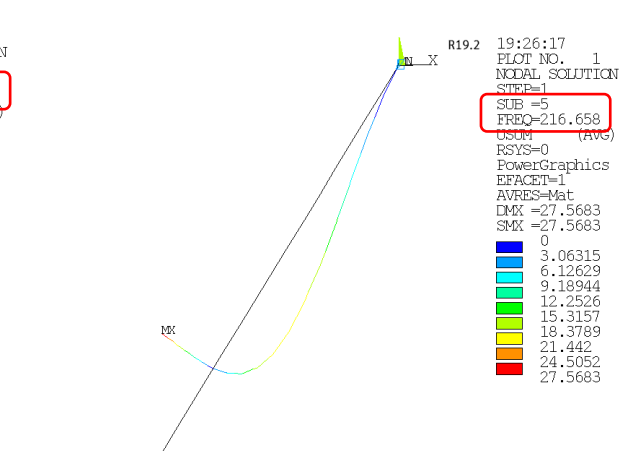
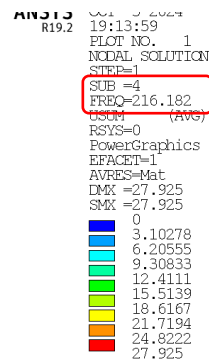


$$\omega_4 = 2\pi f = 1378 \text{ rad/s}$$



Ceowka shell

$$\omega_4 = 2\pi f = 1358 \text{ rad/s}$$



Ceowka beam

$$\omega_5 = 2\pi f = 1361 \text{ rad/s}$$

## Pełna dynamika

Wszystkie typy analizy dynamicznej w programie ANSYS opierają się na następującym ogólnym równaniu ruchu dla układu elementów skończonych:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\}$$

gdzie: [M] macierz masy, [C] macierz tłumienia, [K] macierz sztywności  
{ $\ddot{u}$ } wektor przyspieszenia, { $\dot{u}$ } wektor prędkości, {u} wektor przemieszczenia węzłowego  
{F} wektor obciążenia, (t) czas

Analiza dynamiki nieustalanej (*znana również jako analiza historii czasu*) jest używana do określania odpowiedzi dynamicznej konstrukcji poddanej obciążeniom zależnym od czasu.

Istnieją trzy podstawowe metody rozwiązania dynamiki nieustalanej:

- **pełna metoda dynamiki nieustalanej** (*jest najbardziej ogólna, ma pełną zdolność nieliniową i może obejmować plastyczność, pełzanie, duże ugięcie, duże odkształcenie, usztywnienie naprężeniowe, kontakt i elementy nieliniowe*),
- **metoda redukcji stopni swobody** (*kondensacja układu równań do głównych stopni swobody (master degrees of freedom - MDOF)*),
- **metoda superpozycji modalnej** (*ruch ciała opisuje się za pomocą kombinacji liniowej postaci (wektorów) drgań własnych*).

## Analiza modalna

$$([K] - \omega^2[M])\{u\} = 0$$

Analiza modalna jest przydatna w każdym przypadku, w którym interesujące są częstości własne konstrukcji. Na przykład element maszyny powinien być zaprojektowany tak, aby wytwarzać częstości własne, które zapobiegną drganiom elementu w jednym z jego podstawowych trybów w warunkach pracy. Analiza modalna jest używana do wyodrębniania częstości własnych i postaci drgań konstrukcji. Jest ważna jako pierwszy krok w każdej analizie dynamicznej, ponieważ znajomość podstawowych postaci i częstości własnych konstrukcji może pomóc scharakteryzować jej odpowiedź dynamiczną. Niektóre procedury rozwiązań nieustalonych i harmonicznym wymagają wyników analizy modalnej.

## Odpowiedź harmoniczna

Analiza odpowiedzi harmonicznej służy do określania ustalonej odpowiedzi struktury liniowej na sinusoidalnie zmieniającą się funkcję wymuszającą. Ten typ analizy jest przydatny do badania skutków warunków obciążenia, które zmieniają się harmonicznie w czasie, takich jak te doświadczane przez obudowy, mocowania i fundamenty maszyn wirujących.

## **Spektrum odpowiedzi**

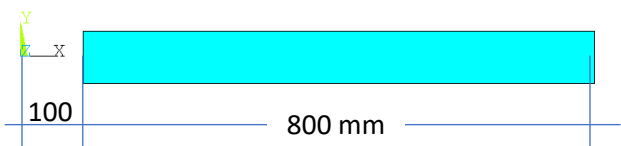
Analiza widma odpowiedzi może być używana do określania odpowiedzi konstrukcji na warunki obciążenia udarowego. Ten typ analizy wykorzystuje wyniki analizy modalnej wraz ze znanym widmem do obliczania maksymalnych przemieszczeń i naprężeń występujących w konstrukcji przy każdej z jej częstości własnych.

Typowym zastosowaniem widma odpowiedzi jest analiza sejsmiczna, która służy do badania wpływu trzęsień ziemi na konstrukcje, takie jak systemy rurociągów, wieże i mosty.

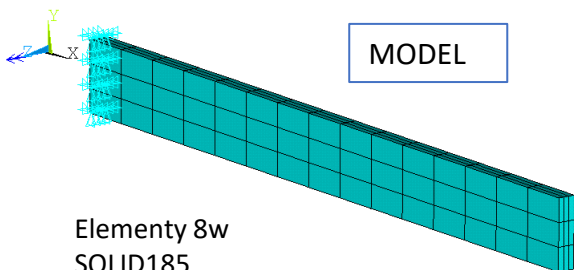
## **Drgania losowe**

Analiza drgań losowych to rodzaj analizy widmowej służący do badania odpowiedzi konstrukcji na wzbudzenia losowe, np. generowane przez silniki odrzutowe lub raketowe.

# Przykład 5 – stalowy płaskownik (A=20x80 mm<sup>2</sup>) wirujący względem osi Z (n=3000 obr./min)



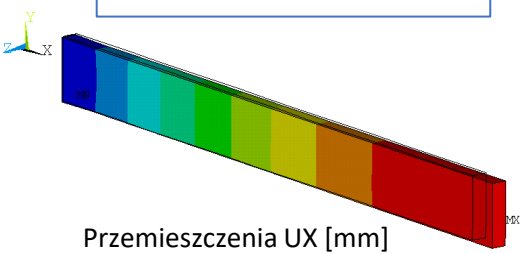
MODEL



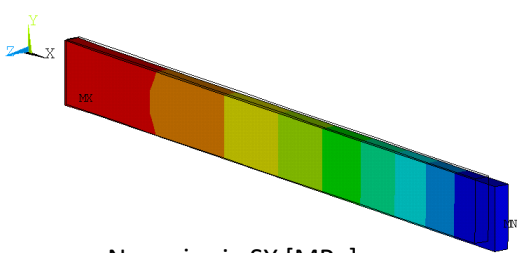
Elementy 8x  
SOLID185

wirujący pret n=3000 obr/min

## ANALIZA STRUKTURALNA



Przemieszczenia UX [mm]



Naprężenia SX [MPa]

UX (AVG)

RSYS=0  
PowerGraphics  
EFACET=1  
AVRES=Mat  
DMX =.773096  
SMX =-.773095

0
.085899
.171799
.257698
.343598
.429497
.515397
.601296
.687196
.773095

SX (AVG)

RSYS=0  
PowerGraphics  
EFACET=1  
AVRES=Mat  
DMX =.773096  
SMN =17.7946  
SMX =319.431

17.7946
51.3099
84.8249
118.34
151.855
185.37
218.886
252.401
285.916
319.431

## Drgania swobodne

## ANALIZA MODALNA

## Drgania podczas obrotów

PRESTRES ON

NODAL SOLUTION  
STEP=1  
SUB =1  
FREQ=25.8854  
USUM (AVG)  
RSYS=0  
DMX =20.0787  
SMX =20.0787

Postać 1  
f<sub>1</sub>=25.88Hz

NODAL SOLUTION  
STEP=1  
SUB =2  
FREQ=102.47  
USUM (AVG)  
RSYS=0  
DMX =20.0229  
SMX =20.0229

Postać 2  
f<sub>2</sub>=102 Hz

NODAL SOLUTION  
STEP=1  
SUB =3  
FREQ=163.502  
USUM (AVG)  
RSYS=0  
DMX =20.1805  
SMX =20.1805

Postać 3  
f<sub>3</sub>=163Hz

NODAL SOLUTION  
STEP=1  
SUB =4  
FREQ=464.222  
USUM (AVG)  
RSYS=0  
DMX =24.8609  
SMX =24.8609

Postać 4  
f<sub>4</sub>=464Hz

NODAL SOLUTION  
STEP=1  
SUB =1  
FREQ=63.5978  
USUM (AVG)  
RSYS=0  
DMX =19.2804  
SMX =19.2804

Postać 1  
f<sub>1</sub>=63.60Hz

NODAL SOLUTION  
STEP=1  
SUB =2  
FREQ=106.957  
USUM (AVG)  
RSYS=0  
DMX =19.9407  
SMX =19.9407

Postać 2  
f<sub>2</sub>=107 Hz

NODAL SOLUTION  
STEP=1  
SUB =3  
FREQ=213.392  
USUM (AVG)  
RSYS=0  
DMX =21.314  
SMX =21.314

Postać 3  
f<sub>3</sub>=213Hz

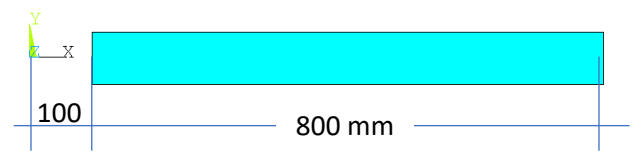
NODAL SOLUTION  
STEP=1  
SUB =4  
FREQ=469.573  
USUM (AVG)  
RSYS=0  
DMX =24.8833  
SMX =24.8833

Postać 4  
f<sub>4</sub>=469Hz

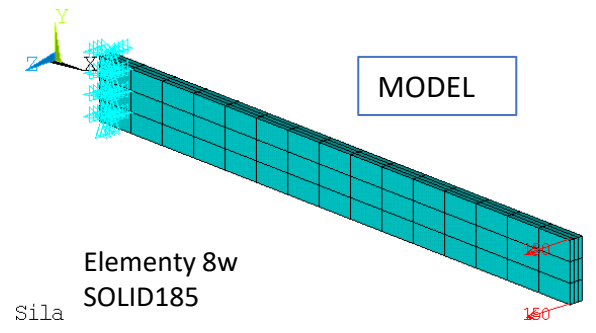
# Przykład 6 – stalowy płaskownik (A=20x80 mm<sup>2</sup>)

Obciążony gwałtownie siłą (FZ=300 N)

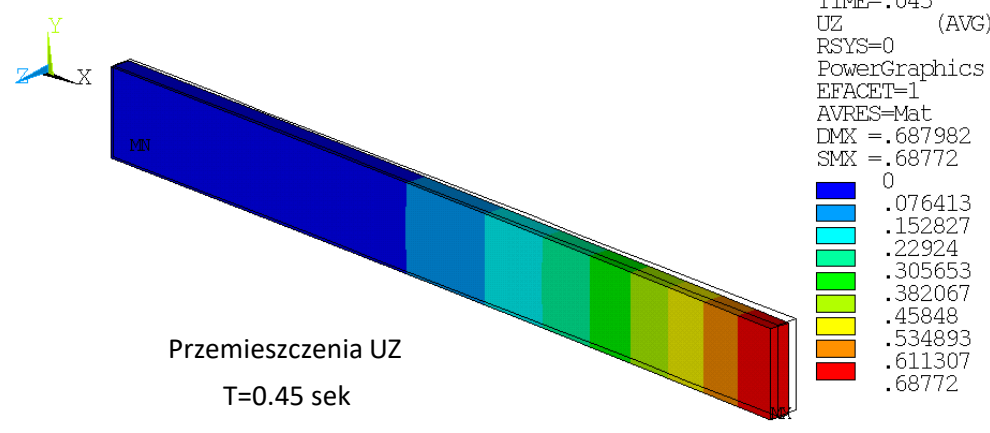
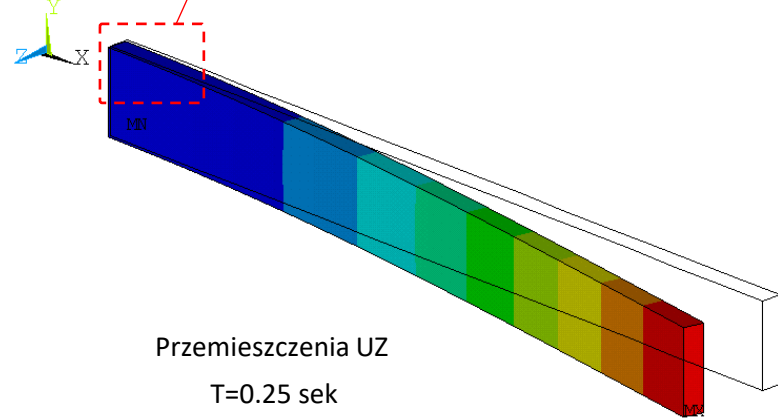
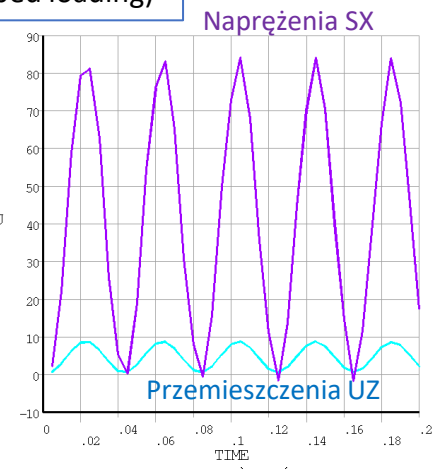
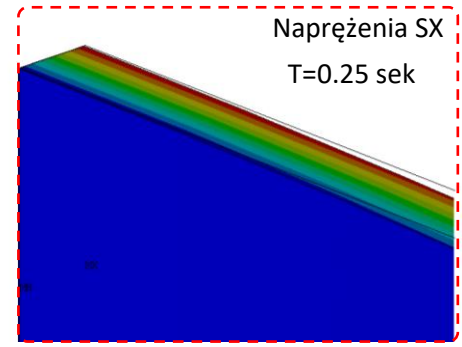
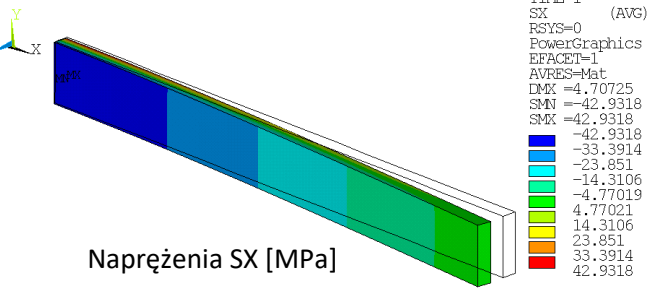
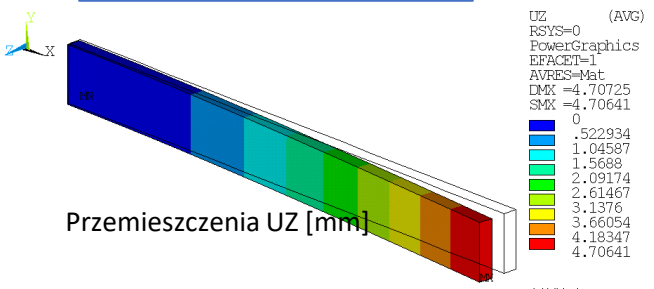
## ANALIZA TRANSIENT – FULL (stepped loading)



MODEL



### ANALIZA STRUKTURALNA



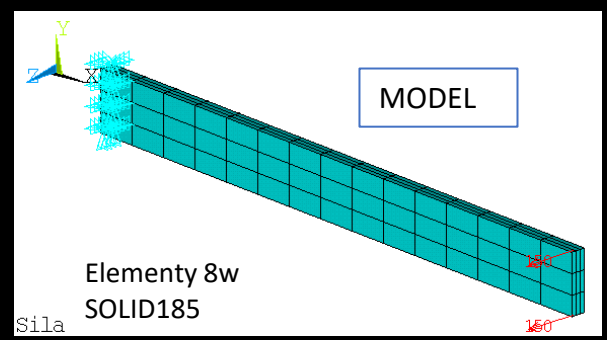
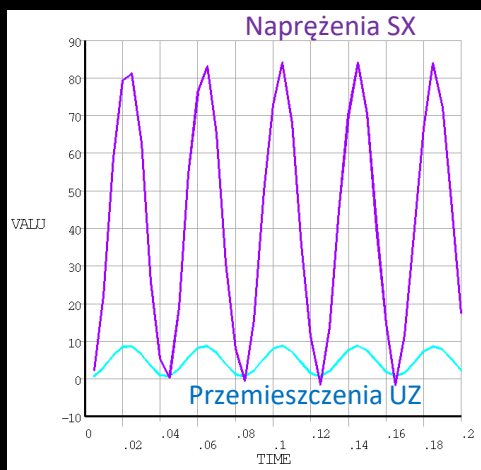
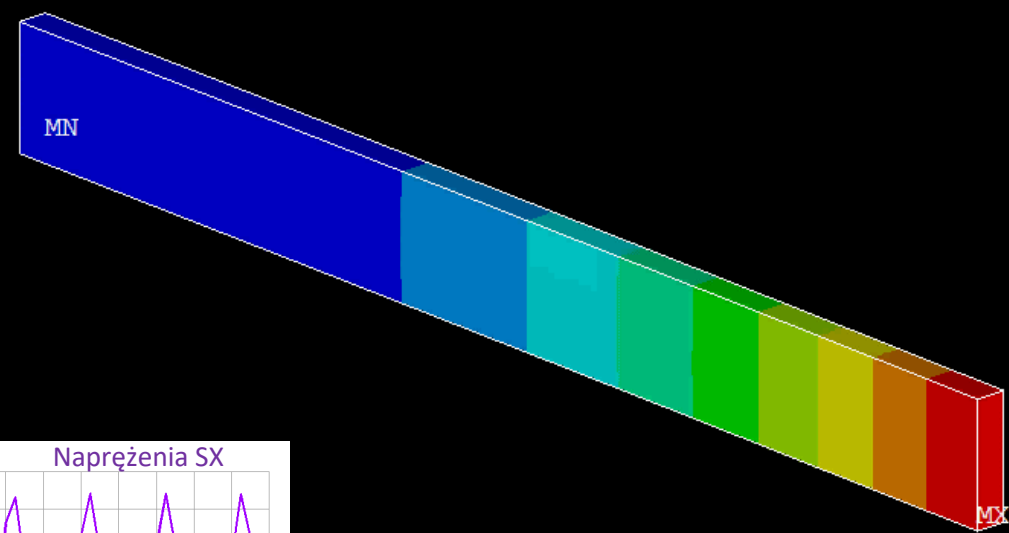
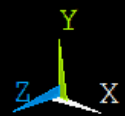
# Przykład 6 – stalowy płaskownik (A=20x80 mm<sup>2</sup>)

Obciążony gwałtownie siłą (FZ=300 N)

ANSYS  
R19.2

OCT 19 2024  
21:53:11  
NODAL SOLUTION  
STEP=1  
SUB =1  
TIME=.005  
UZ (AVG)  
RSYS=0  
PowerGraphics  
EFACET=1  
AVRES=Mat  
DMX =.774648  
SMX =.77439  
0  
Color scale legend:  
0: .086043  
.086043: .172087  
.172087: .25813  
.25813: .344173  
.344173: .430216  
.430216: .51626  
.51626: .602303  
.602303: .688346  
.688346: .77439

ANALIZA TRANSIENT – FULL (stepped loading)



Sila FZ=300N NL